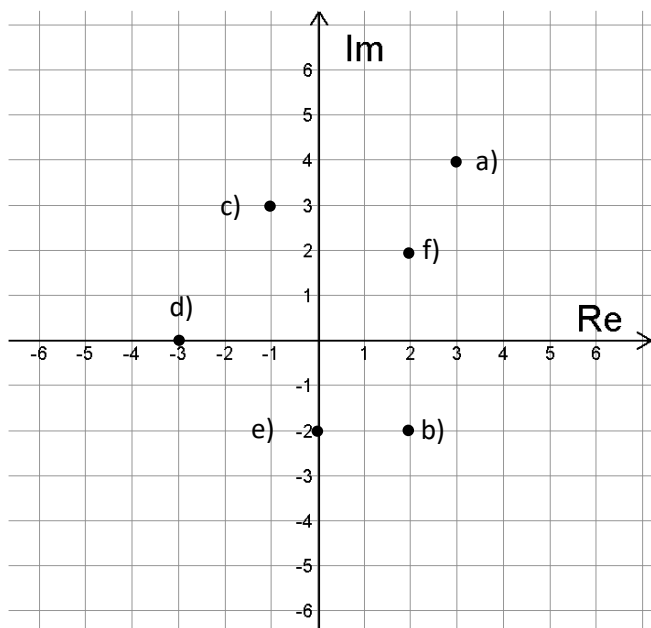


Några uppgifter om komplexa tal på rektangulär form

1. Nedan visas ett komplext talplan med talen a) – f) markerade.

a) Ange dessa tal på formen $a + bi$



b) Två av de komplexa talen ovan är varandras *konjugat*. Vilka två är det?

2. Ange ett valfritt komplext tal, z , som uppfyller villkoren nedan

a) $\operatorname{Re} z = 4$

b) $\operatorname{Im} \bar{z} = 2$

c) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

3. Låt $z_1 = 3 + 2i$ och $z_2 = 2 - 4i$. Genomför beräkningarna nedan.

Kontrollera gärna svaret på miniräknaren

a) $z_1 + z_2$

b) $z_2 - z_1$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $(\operatorname{Re} z_1) \cdot \bar{z}_2$

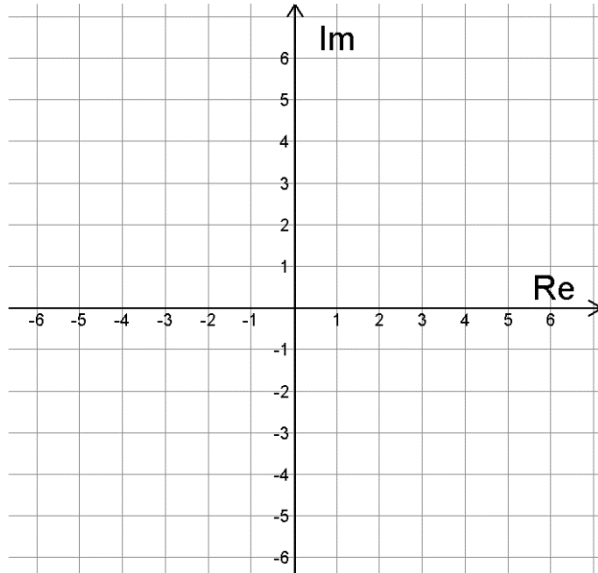
4. Nedan visas ett komplext talplan. Markera talen

a) $z_1 = 2 + 3i$

b) $z_2 = 5i$

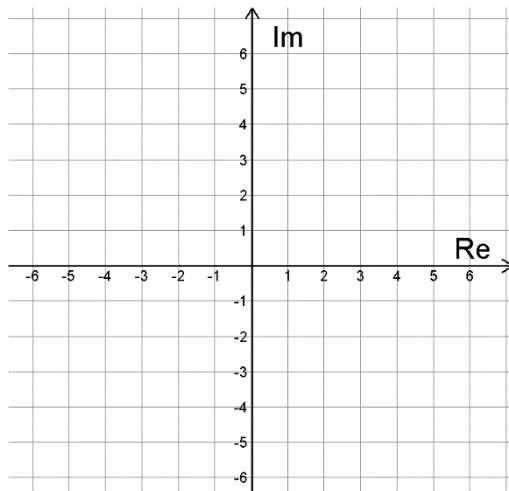
c) $z_3 = -3 - 3i$

d) ALLA de tal z som uppfyller $Im z = Re z$

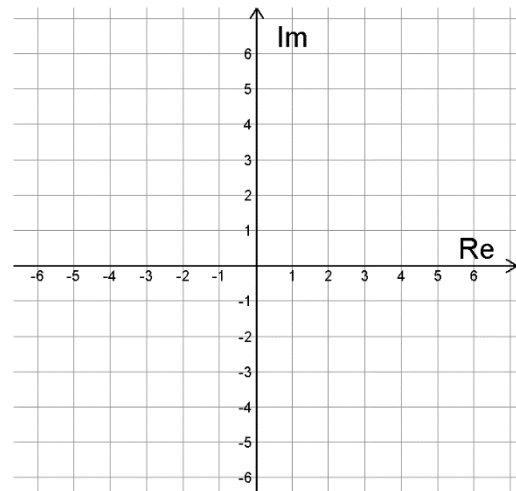


5. Utgå från talen i uppgift 4a, 4b och 4c och multiplicera dessa med talet i

a) Markera både talen före och efter multiplikation komplexa talplanet nedan.



De tre talen **före** multiplikationen med i



De tre talen **efter** multiplikationen med i

b) Jämför bilderna. Det finns ett geometriskt samband mellan ett komplext tal *före och efter* multiplikation med i . Beskriv sambandet.

6. Hitta på två egna komplexa tal, A och B , och genomför beräkningarna.

a) $A + B$

b) $B - A$

c) $A \cdot i$

c) $A \cdot B$

d) $(\operatorname{Re} A) \cdot (\operatorname{Im} B)$

Använd din miniräknare för att se om du räknat rätt!

7. Försök hitta det komplexa tal, z , som löser ekvationerna:

a) $z + 2i = 5 - 3i$

b) $3\bar{z} = 12 - 6i$

c) $2z - \bar{z} = 4 + 2i$

8. a) Använd din miniräknare för att testa om ett komplext tal **adderat med sitt konjugat** leder till att **summan blir rent reell** (dvs ett tal utan i)

b) Använd din miniräknare för att testa om ett komplext tal **multipliserat med sitt konjugat** leder till att **produkten blir rent reell** (dvs ett tal utan i)

c) Försök bevisa dina slutsatser i a) och b) rent generellt

FACIT - Några uppgifter om komplexa tal på rektangulär form

1. a) $3 + 4i$
b) $2 - 2i$
c) $-1 + 3i$
d) $-3 + 0i = -3$
e) $0 - 2i = -2i$
f) $2 + 2i$

b) Talen b) och f) är varandras *konjugat*

(= varandras spegelbilder med Re-axeln som spegel)

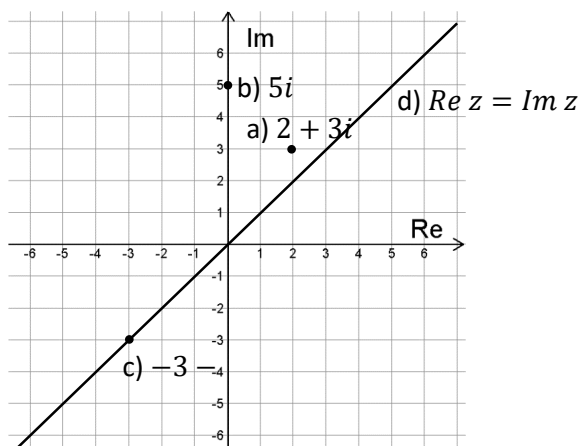
Konjugerade par har alltid samma realdel, men motsatt imaginärdel, ex

$5 + 2i$ och $5 - 2i$

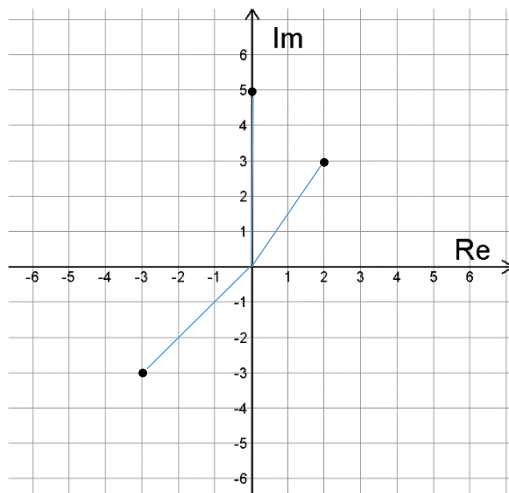
2. a) T.ex $4 + 3i, 4 - 5i$
b) T.ex $4 - 2i, 2 - 2i$
c) T.ex $5 + 5i, 3 + 3i$

3. a) $(3 + 2i) + (2 - 4i) = 5 - 2i$
b) $(2 - 4i) - (3 + 2i) = -1 - 6i$
c) $(3 + 2i) \cdot (2 - 4i) = 14 - 8i$
d) $3 \cdot (2 + 4i) = 6 + 12i$

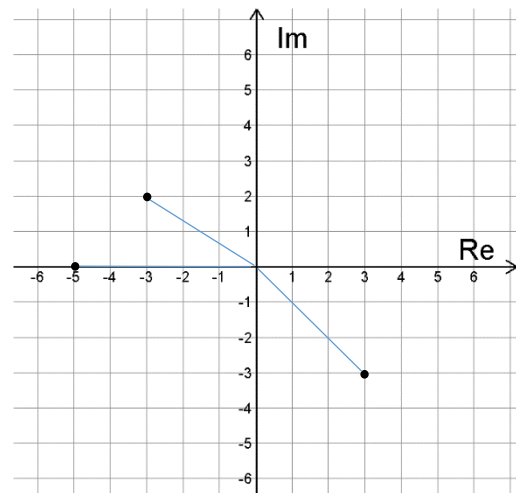
4. d)



5. a)



De tre talen **före** multiplikationen med i



De tre talen **efter** multiplikationen med i

b) Ett komplext tal "flyttas fram" 90 grader när det gångras med i

6. T.ex

$$A = 1 + 2i,$$

$$B = -1 + i$$

a)

$1+2i \rightarrow A$	$1+2i$
$-1+i \rightarrow B$	$-1+i$

$A+B$	$-1+i$	$B-A$	$-2-i$
$B-A$	$3i$	$A*i$	$-2+i$
$A*i$	$-2-i$	$(\text{real}(A)) * (\text{imag}(B))$	1
	$-2+i$		

7. En lösningsstrategi är att kalla det okända talet för $a + bi$ och sedan "klura ut" vad a och b måste vara för tal.

a) $a + bi + 2i = a + (b + 2)i = 5 - 3i$

"Icke i "-ska vara lika på båda sidor: $a = 5$

" i " ska vara lika på båda sidor: $(b + 2) = -3$

Det tal som löser ekvationen är $5 - 5i$

b) $3(a - bi) = 3a - 3bi = 12 - 6i$

"Icke i " ska vara lika på båda sidor: $3a = 12$

" i " ska vara lika på båda sidor: $-3b = -6$

Det tal som löser ekvationen är $4 + 2i$

7. c) $2(a + bi) - (a - bi) = 2a + 2bi - a + bi = a + 3bi = 12 - 6i$

"Icke i" ska vara lika på båda sidor: $a = 12$

"i" ska vara lika på båda sidor: $3b = -6$

Det tal som löser ekvationen är $12 - 2i$

8. T.ex om

$$A = 3 - 2i$$

$$B = 5 - i$$

$$C = 2 + i$$

a)

$A + \text{conj}(A)$	6
$B + \text{conj}(B)$	10
$C + \text{conj}(C)$	4

Summan verkar alltid bli ett reellt tal

b)

$A \cdot \text{conj}(A)$	13
$B \cdot \text{conj}(B)$	26
$C \cdot \text{conj}(C)$	5

Produkten verkar alltid bli ett reellt tal

c) Kalla talet för $z = a + bi$ där a och b i sig är tal utan i .

Då fås att $\bar{z} = a - bi$

Summan = $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ vilket är reellt eftersom a är reellt.

Produkten = $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = [i^2 = -1]$
 $= a^2 + b^2$ vilket är reellt eftersom både a och b är reella tal.